DEVOIR DE RENTRÉE

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1 Échauffement.

Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3 et S_4 et change d'état de la manière suivante :

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé,
- Si à l'instant $t = n$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable.
- Si à l'instant $t = n$, le spot S_k est allumé ($2 \leqslant k \leqslant 4$), le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n+1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume

Écrire une fonction `spot()` (sans argument) qui simule la variable aléatoire X.

http://louismerlin.fr.

Exercice 2 **Algèbre** d'après **EDHEC** 2025.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A n'est pas inversible.

2. Écrire une fonction Python d'en-tête matA retournant la matrice A.

3. **a.** Montrer que les matrices $A - 5I$ et $A + 4I$ ne sont pas inversibles.

Pour n'importe quel nombre réel λ, on note $E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I)$.

b. Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

c. Montrer que $E_0(A)$, $E_5(A)$ et $E_{-4}(A)$ sont tous les trois de dimension 1 et préciser une base de chacun de ces espaces.

Dans la suite, on notera U, V et W des générateurs respectifs de chacun des ces trois espaces.

d. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

e. **Difficile** Montrer enfin que, si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 5, -4\}$, alors $E_\lambda(A) = \{0\}$.

On note P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de U, V et W.

4. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. On précisera les valeurs diagonales.

5. On considère maintenant l'ensemble E des matrices de la forme $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a - b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice A est élément de E.

b. Calculer $P^{-1}M(a, b)P$. Que remarque-t-on ?

6. Soit n un entier naturel non nul.

a. À l'aide de la matrice P, indiquer comment déterminer la puissance n-ième de n'importe quelle matrice de E (seule la démarche est demandée, les calculs et les résultats numériques ne sont pas exigés).

b. En déduire, sans la commande al.matrix_power et toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction Python d'en-tête puissanceM(a,b,n) renvoyant $M(a, b)^n$.

EXERCICE 3 **Analyse/Informatique** d'après **EMLyon 2023** Exercice 1.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tour entier naturel n.

1. **a.** Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. **Informatique.**

a. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel fonc_1(a) renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```python
def fonc_1(a) :
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while ...... :
    u = exp(-u)/u
    n = ......
  return n
```

b. On considère maintenant la fonction Python

```python
def fonc_2(a) :
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while u > a :
    u = exp(-u)/u
    n = n+1
  return n
```

Les appels fonc_1(10**6) et fonc_2(10**(-6)) donnent respectivement 6 et 5.
Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
Commenter ce résultat en une ligne.

c. Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

3. Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose $g(x) = e^{-x} - x^2$.

a. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$.

b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x possède une unique solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$ que l'on notera α.

c. Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $e \approx 2,7$.

4. **a.** Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in]0,+\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

a. Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

b. Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $h(x) = x$ d'inconnue x admet exactement deux solutions sur $[0,+\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question **3.b**.

d. En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Exercice 4 **Probabilités discrètes** d'après **ECRICOME 2022** Exercice 3 Partie I.

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 et d'une infinité de jetons numérotés 1,2,3,...

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n, non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Pour tout entier naturel non nul, on note V_n l'événement : "Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **a.** Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- **b.** Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
- **c.** Justifier que $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$.
- **d.** Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $(X_n = 0)$, $(Y_n = 0)$ et $(Z_n = 0)$.
- **e.** En déduire que
$$P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. On note V l'événement "Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide".

Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $P(V) = 0$.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

- **a.** Compléter le programme Python suivant pour qu'il simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'il renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```
import numpy.random as rd

def T():
  X=0
  Y=0
  Z=0
  n=0
  L=[X,Y,Z]
  while ......... :
    i = rd.randint(0,3)    #  choix d'un nombre entier entre 0 et 2
    L[i] = ......
    n = n+1
  return .......
```

- **b.** Écrire un programme Python qui simule 10 000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant pour le moment que son espérance existe).

4. Déterminer $T(\Omega)$.

5. Démontrer que pour tout $n \in T(\Omega)$,
$$P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$

6. Démontrer que la variable aléatoire admet une espérance et calculer cette espérance.